EPFL 2024/2025	Dr. Leonid Monin
Analyse III	**Exercices**
Série de révision	

Credits : These additional exercises (in french) have been prepared by Dr. Klaus Widmayer, Dr. Riccardo Tione, Dr. Maria Colombo, Dr. David Strutt, and Dr. Pablo Antolin.

QCM.

Exercice 1. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x, y, z) := (3y + \cos(x + z^2), 3x + y + z - 1, y + 2z\cos(x + z^2))$$

et soit $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$, où $\gamma(t) = (t, 2t^3, t^9)$, $t \in [0, 1]$. Alors :

- ☐ $\int_\Gamma F \cdot ds = -8 + \sin(2)$.
- ☐ $\int_\Gamma F \cdot ds = 8 + \sin(2)$.
- ☐ $\int_\Gamma F \cdot ds = 8 - \sin(2)$.
- ☐ $\int_\Gamma F \cdot ds = -8 - \sin(2)$.

Exercice 2. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $F(x, y, z) := g(|(x, y, z)|)(x, y, z)$, où $g \in C^1(\mathbb{R})$ et $|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Alors :

- ☐ $\mathrm{div}(F) = 0$ sur $\mathbb{R}^3$ pour chaque $g \in C^1(\mathbb{R})$.
- ☐ $\int_\Gamma F \cdot ds = 1$ pour quelque $g \in C^1(\mathbb{R})$, où $\Gamma = \mathrm{Im}(\gamma)$ et $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0), t \in [0, 1]$.
- ☐ F dérive d'un potentiel sur $\mathbb{R}^3$ pour chaque $g \in C^1(\mathbb{R})$, donnée par $G(x, y, z) := \int_{-3}^{|(x,y,z)|} t\, g(t)\, dt$.
- ☐ Aucune des réponses précédentes.

Exercice 3. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x, y, z) := (y + \cos(z), xe^z, xy)$$

et soit $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 3, z \in (-1, 2)\}$, avec normale extérieure ν. Alors :

- ☐ $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle d\sigma = 1$.
- ☐ $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle d\sigma = -1$.
- ☐ $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle d\sigma = 3$.
- ☐ $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle d\sigma = 0$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ x^2 - x + \frac{9}{8} & \text{si } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 2x - x^2 & \text{si } \frac{3}{4} \leq x < 1, \end{cases}$$

et étendue par 1-périodicité. Soient Ff sa série de Fourier, et $F_N f$ sa somme partielle de Fourier d'ordre N. Lequel des points suivants n'est pas vrai :

- ☐ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_N f(x)$ tend vers $f(x)$ quand $N \to \infty$.
- ☐ $Ff(1/2) = \frac{7}{8}$.
- ☐ Ff consiste uniquement en fonctions de sinus.
- ☐ Ff consiste uniquement en fonctions de cosinus.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3^{|n|}} \cos(2\pi n x)$ et étendue par 1-périodicité. Quelle est la valeur de $\int_0^1 f^2(x)dx$?

- ☐ $5/4$.
- ☐ $5\pi/2$.
- ☐ $17/8$.
- ☐ $1/4$.

Exercice 6. Sachant que pour $f(y) = \frac{1}{1+y^2}$ on a $\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\alpha|}$, la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+9y^2} dy$ est :

- ☐ 3π.
- ☐ $\frac{\pi}{3}$.
- ☐ $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- ☐ L'intégrale diverge.

Exercice 7. Pour $b > a > 0$, soient $g(x) := e^{-b|x|}$ et $h(x) := e^{-a|x|}$. La valeur de $\mathcal{F}(g' * h)(0)$ est :

- ☐ 1.
- ☐ b.
- ☐ $-\sqrt{2\pi} \cdot b$.
- ☐ 0.

Exercice 8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$, et pour $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée, supposons que $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ résout l'équation $-v'' + \lambda v = w * v$.

- ☐ Si $\hat{w}(0) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}$, alors $\hat{v}(0) = 0$.
- ☐ Si $\hat{w}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, alors $\hat{v}(0) = 0$ quelque soit λ.
- ☐ Si $\hat{w}(\sqrt{2\pi}) = \sqrt{2\pi}$, alors $\hat{v}(\sqrt{2\pi}) = 0$ quelque soit λ.
- ☐ Si $\hat{w}(2\pi) = \sqrt{2\pi}$, alors $\hat{v}(2\pi) = 0$.

Exercice 9. Soit $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\right\}$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ le champ vectoriel

$$F(x,y) = \left(2xy^2 + \frac{x}{x^2+y^2},\ 2x^2y + 3y^2 + \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

(i) Calculer $\operatorname{rot} F(x,y)$.

(ii) Le champ F dérive-t-il d'un potentiel sur Ω ? Si oui, trouver un potentiel et indiquer comment vous l'avez trouvé, si non justifier la réponse.

Exercice 10. Vérifier le théorème de la divergence pour le champ vectoriel $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^3)$ et

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x^2+y^2) < z^2,\ 0 < z < 2\right\}.$$

Exercice 11. Vérifier le théorème de Stokes pour le champ vectoriel $F(x,y,z) = (0,0,x^2-y^2)$ et

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2+y^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{1}{2} \leq z \leq 1\right\}.$$

Exercice 12. (i) Calculer la série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = 2x$ sur $[-1,1[$, étendue par 2-périodicité.

(ii) À l'aide de la question (i), et des propriétés des séries de Fourier, trouver la série de Fourier de la fonction g définie par $g(x) = x^2$ sur $[-1,1[$, étendue par 2-périodicité. On indiquera tous les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier de g.

(iii) À l'aide de votre réponse à (ii), déterminer la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

(iv) Soit g la fonction définie en (ii) ci dessus. Si on vous avait donné les coefficients de la série de Fourier de g, pourriez-vous les utiliser pour déduire les coefficients de la série de Fourier de la fonction f définie en (i) ci-dessus ? Justifier votre réponse.

Exercice 13. (i) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et C^1. Trouver une solution $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique de

$$u'(t) + 2u(t-\pi) = f(t)$$

(ii) écrire la solution trouvée au point (i) dans le cas où $f(t) = 1 + 4\sin(6t)$.

Exercice 14. À l'aide des propriétés des transformées de Fourier (linéarité et transformée de la composition avec fonction affine), et du tableau des transformées de Fourier, trouver la transformée de Fourier de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = e^{-3x^2+6x+6}$$

Exercice 15. A l'aide des transformées de Fourier, trouver $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de
$$2u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-|x-t|}dt = e^{-|x|}.$$

Exercice 16. .

(i) Soit le champ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $F(x, y) = (-y, x)$ et soit la courbe $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2 + \sinh y, 0 \leq y \leq 1\}$. Calculer $\int_\Gamma F \cdot dl$

(ii) Soit le champ :
$$F(x, y) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{y}{1+y^2} - \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$
Le champ F dérive-t-il d'un potentiel sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Si oui trouver un potentiel, si non justifier la réponse.

Exercice 17. 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par
$$f(x) = \begin{cases} -\sin(5x) & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \sin(5x) & \text{si } \ 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(i) Calculer la série de Fourier Ff de f.

(ii) Est-ce que $Ff = f$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$? Justifier la réponse.

(iii) Vers quelle fonction, définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, converge la série obtenue par dérivation terme à terme de Ff ?

2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

	$f(y)$	$\mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$
1	$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \lvert y\rvert < \lvert b\rvert \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lvert b\rvert\alpha)}{\alpha}$
2	$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha}$
3	$f(y) = \begin{cases} e^{-wy}, & \text{si } y > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (w > 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{w + i\alpha}$
4	$f(y) = \begin{cases} e^{-wy}, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(w+i\alpha)b} - e^{-(w+i\alpha)c}}{w + i\alpha}$
5	$f(y) = \begin{cases} e^{-iwy}, & \text{si } b < y < c \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(w+\alpha)b} - e^{-i(w+\alpha)c}}{w + \alpha}$
6	$f(y) = \frac{1}{y^2 + w^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lvert w\alpha\rvert}}{\lvert w\rvert}$
7	$f(y) = \frac{e^{-\lvert wy\rvert}}{\lvert w\rvert} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\alpha^2 + w^2}$
8	$f(y) = e^{-w^2y^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}\lvert w\rvert} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$
9	$f(y) = ye^{-w^2y^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}\lvert w\rvert^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4w^2}}$
10	$f(y) = \frac{4y^2}{(y^2 + w^2)^2} \quad (w \neq 0)$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\lvert w\rvert} - \lvert\alpha\rvert \right) e^{-\lvert w\alpha\rvert}$

$(w \in \mathbb{R})$